Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ÉCOLE EUROPÉENNE DES AFFAIRES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques II

OPTIONS : Économique et Technologique

Mardi 3 Mai 1988, de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

Le but du problème est l'étude des réalisations de trois « face » consécutifs dans une suite de parties de pile ou face, ce qui fait l'objet de la partie III. À cet effet, on s'intéresse tout d'abord dans la partie I aux puissances de deux matrices, puis, dans la partie II, au comportement asymptotique d'une suite.

La répétition d'un même événement dans une suite de tirages indépendants constitue un modèle commode pour l'étude de certains problèmes de gestion, notamment de réapprovisionnement des stocks.

Partie I On considère les deux matrices M et N suivantes : $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ $N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

1. Calculer M^2, M^3 et M^4. En déduire la relation : $4M^4 - 2M^3 - M^2 - M = 0$ (1)

2. Calculer N^2, N^3 et N^4. En déduire la relation : $8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = 0$ (2)

Partie II On étudie dans cette partie la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ telle que : $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = \frac{1}{8}$ et vérifiant pour $n \geq 1$ la relation :

$$4p_{n+3} = 2p_{n+2} + p_{n+1} + p_n \quad (3)$$

À cet effet, on considère la fonction f suivante, définie sur **R** par : $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1$

1. *a*) Étudier et représenter graphiquement la fonction f.

   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule que l'on précisera.

2. À l'aide de la relation (3) définissant (p_n), donner un algorithme permettant de calculer p_k pour $k \leq n$ et obtenir ainsi des valeurs approchées de p_k pour $k \leq 15$ (que l'on donnera avec quatre décimales). Que constate-t-on ?

3. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant la relation suivante pour tout entier naturel non nul n :

$$4u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$$

a) On considère les trois suites $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$x_n = 1$, $y_n = \frac{1}{2^n}\cos\frac{2n\pi}{3}$, $z_n = \frac{1}{2^n}\sin\frac{2n\pi}{3}$ Montrer que ces trois suites appartiennent à E.

T.S.V.P.

b) Déterminer les réels α, β et γ tels que l'on ait pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$:

$$p_n = \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n$$

c) Prouver que l'on a alors, pour tout entier naturel non nul n : $p_n = \alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n$

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$ et déterminer un réel k tel que l'on ait : $\left| p_n - \lim_{n \to +\infty} p_n \right| \leqslant \frac{k}{2^n}$

Comparer aux résultats numériques obtenus dans la question 2.

Partie III

A On effectue une suite infinie de pile ou face avec une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire Y_n prenant pour valeur :
0 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « pile » ;
1 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », celui-ci étant le premier, ou le quatrième, ou le septième,..., ou le $(3k+1)^{\text{ième}}$,... « face » obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti) ;
2 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », celui-ci étant le deuxième, ou le cinquième, ou le huitième,..., ou le $(3k+2)^{\text{ième}}$,... « face » obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti) ;
3 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », celui-ci étant le troisième, ou le sixième, ou le neuvième,..., ou le $(3k+3)^{\text{ième}}$,... « face » obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti).

On dit qu'une série de trois « face » consécutifs s'achève à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet si et seulement si l'événement $[Y_n = 3]$ est réalisé.

Exemple. Soit la suite de résultats (F désigne « face » et P désigne « pile ») :

numéro du jet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14...
résultat	P	F	F	P	P	P	F	F	F	F	F	F	P	F....

Alors : $Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$, $Y_3 = 2$, $Y_4 = 0$, $Y_5 = 0$, $Y_6 = 0$, $Y_7 = 1$, $Y_8 = 2$, $Y_9 = 3$, $Y_{10} = 1$, $Y_{11} = 2$, $Y_{12} = 3$, $Y_{13} = 0$, $Y_{14} = 1$,... et trois « face » consécutifs ont été obtenus aux neuvième, douzième,... jets.

1. Exprimer pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$ les probabilités $P([Y_{n+1} = i])$ en fonction des probabilités $P([Y_n = j])$ pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$.

2. On pose : $a_n = P([Y_n = 0])$, $b_n = P([Y_n = 1])$, $c_n = P([Y_n = 2])$, $d_n = P([Y_n = 3])$. Pour tout entier naturel non nul n, soit V_n la matrice-colonne définie par : $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $V_{n+1} = M V_n$

où la matrice M est définie dans la partie I.

b) En multipliant à droite la relation (1) par V_{n-1} (où $n \geqslant 2$), établir une relation entre V_{n+3}, V_{n+2}, V_{n+1} et V_n, puis entre d_{n+3}, d_{n+2}, d_{n+1} et d_n.

c) Calculer d_1, d_2, d_3, d_4.

d) Comparer la suite (d_n), probabilité pour que l'événement $[Y_n = 3]$ soit réalisé, à la suite (p_n) étudiée dans la partie II. En déduire $\lim_{n \to +\infty} P([Y_n = 3])$.

T.S.V.P.

B On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire X indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, on a obtenu trois fois de suite le résultat « face ». Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire Z_n :
— prenant pour valeur 3 si trois « face » consécutifs sont obtenus à l'issue du $n^{\text{ième}}$ jet ou ont été déjà obtenus à l'issue d'un jet antérieur ;
— prenant sinon pour valeur :
0 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « pile » ;
1 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », ce « face » étant le premier obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti) ;
2 si le $n^{\text{ième}}$ jet a amené « face », ce « face » étant le second obtenu depuis le précédent « pile » (ou depuis le début du jeu si « pile » n'est pas encore sorti).

L'événement $[X \leqslant n]$ est donc réalisé si et seulement si l'événement $[Z_n = 3]$ est réalisé.

Exemple. En reprenant la suite de pile ou face donnée dans la partie III.A, on a : $X = 9$, $Z_1 = 0$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = 2$, $Z_4 = 0$, $Z_5 = 0$, $Z_6 = 0$, $Z_7 = 1$, $Z_8 = 2$ et, pour $n \geqslant 9$, $Z_n = 3$.

1. Exprimer pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$ les probabilités $P([Z_{n+1} = i])$ en fonction des probabilités $P([Z_n = j])$ pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$.

2. On pose : $a'_n = P([Z_n = 0])$, $b'_n = P([Z_n = 1])$, $c'_n = P([Z_n = 2])$, $d'_n = P([Z_n = 3])$. Pour tout entier naturel non nul n, soit W_n la matrice-colonne définie par :

$$W_n = \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \\ c'_n \\ d'_n \end{pmatrix}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$W_{n+1} = N W_n$$

où la matrice N est définie dans la partie I.

b) En multipliant à droite la relation (2) par W_n, établir une relation entre W_{n+4}, W_{n+3}, W_{n+2}, W_{n+1} et W_n, puis entre d'_{n+4}, d'_{n+3}, d'_{n+2}, d'_{n+1} et d'_n.

c) Calculer $P([X = 1])$, $P([X = 2])$, $P([X = 3])$ et $P([X = 4])$. Montrer que, pour $n \geqslant 2$:

$$P([X = n]) = d'_n - d'_{n-1}$$

d) À l'aide de cette égalité et de la relation définissant (d'_n), donner un algorithme permettant de calculer $P([X = k])$ pour $k \leqslant n$. Obtenir ainsi des valeurs approchées de $P([X = k])$ pour $k \leqslant 15$ (que l'on donnera avec six décimales), puis du quotient $\dfrac{P([X = k+1])}{P([X = k])}$ (avec quatre décimales). Que constate-t-on ?

o o

o

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail